



QUANPIN ZHINENGZUOYE

智能作业

高中数学²
必修第二册

RJB

主编：肖德好

天津出版传媒集团
天津人民出版社

编写依据

以新教材为本，以课程标准（2017年版2020年修订）为纲。

选题依据

- 研究新教材使用地区最新题源，研究新教材新课标形式下的同步命题特点。
- 选题注重落实必备知识，满足同步教学中的基础性要求，兼顾一定的综合性。
- 强调试题的情境性、开放性，拓展学科知识的应用性和创新性。

▼ 课时作业

特点一 课时作业，分层设置

- 夯实基础——巩固必备知识、落实规范解答
- 素养提能——提升学科素养、形成关键能力
- 思维训练——拓广解题思路、探索新颖题目



特点二 不断进行复习巩固，对常见题型进行总结

- 素养测评滚动——对知识进行阶段测评，验收每一阶段学习成果
- 热点题型探究——题型方法全面概括，解析本章热点题型

▼ 素养测评卷

单元素养测评卷

知识覆盖到位，有助查漏补缺

阶段素养测评卷

模块素养测评卷

覆盖全书知识，精准备战期末



**精选一线好题，拒绝知识倒挂、选题超纲现象，
助力同步高效学习！**

CONTENTS

全品智能作业·数学 RJB

04

第四章 指数函数、对数函数与幂函数

4.1 指数与指数函数	001
4.1.1 实数指数幂及其运算	001
4.1.2 指数函数的性质与图象	003
第1课时 指数函数的性质与图象 / 003	
第2课时 指数函数的性质与图象的应用 / 005	
4.2 对数与对数函数	007
4.2.1 对数运算	007
4.2.2 对数运算法则	009
4.2.3 对数函数的性质与图象	011
第1课时 对数函数的性质与图象 / 011	
第2课时 对数函数的性质与图象的应用 / 013	
4.3 指数函数与对数函数的关系	015
4.4 幂函数	017
☑ 素养测评滚动(一)	019
4.5 增长速度的比较	021
4.6 函数的应用(二)	024
4.7 数学建模活动: 生长规律的描述	027
☑ 热点题型探究(一)	028

• 题型1 指数式、对数式的运算与换底公式的应用 / 028

• 题型2 函数图象 / 028 • 题型3 复合函数 / 029

05

第五章 统计与概率

5.1 统计	031
5.1.1 数据的收集	031
5.1.2 数据的数字特征	034
第1课时 最值、平均数、中位数、百分位数 / 034	
第2课时 众数、极差、方差与标准差 / 036	
5.1.3 数据的直观表示	038
第1课时 柱形图、折线图、扇形图、茎叶图 / 038	
第2课时 频数分布直方图与频率分布直方图 / 041	
5.1.4 用样本估计总体	044
第1课时 用样本的数字特征估计总体的数字特征 / 044	
第2课时 用样本的分布来估计总体的分布 / 047	
5.2 数学探究活动: 由编号样本估计总数及其模拟	050

5.3 概率	052
5.3.1 样本空间与事件	052
5.3.2 事件之间的关系与运算	054
5.3.3 古典概型	056
第1课时 古典概型 / 056	第2课时 古典概型的应用 / 058
5.3.4 频率与概率	061
5.3.5 随机事件的独立性	064
5.4 统计与概率的应用	067
☛ 素养测评滚动(二)	070

06

第六章 平面向量初步

6.1 平面向量及其线性运算	073
6.1.1 向量的概念	073
6.1.2 向量的加法	075
6.1.3 向量的减法	077
6.1.4 数乘向量	079
6.1.5 向量的线性运算	081
6.2 向量基本定理与向量的坐标	083
6.2.1 向量基本定理	083
6.2.2 直线上向量的坐标及其运算	085
6.2.3 平面向量的坐标及其运算	087
第1课时 平面向量的坐标表示和运算 / 087	第2课时 向量平行的坐标表示 / 089
☛ 素养测评滚动(三)	091
6.3 平面向量线性运算的应用	094
☛ 热点题型探究(二)	096

- 题型1 利用向量确定点的位置 / 096
- 题型2 利用向量求解线段长度比值 / 096
- 题型3 利用向量确定三角形的“四心” / 097
- 题型4 利用向量解决面积问题 / 098

■ 参考答案	099
--------------	-----

◆ 素养测评卷 ◆

阶段素养测评卷(一)	卷1	单元素养测评卷(三)	卷11
单元素养测评卷(一)	卷3	模块素养测评卷(一)	卷13
阶段素养测评卷(二)	卷5	模块素养测评卷(二)	卷15
单元素养测评卷(二)	卷7		
阶段素养测评卷(三)	卷9	参考答案	卷17

第四章 指数函数、对数函数与幂函数

4.1 指数与指数函数

4.1.1 实数指数幂及其运算

基础 夯实篇

1. 下列各式中一定成立的是 ()
- A. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ B. $\sqrt[4]{a^4} = a$
- C. $\sqrt{2^2} = 2$ D. $\sqrt[3]{(-2)^3} = 2$
2. 已知 $a > 0$, 则 $\frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} =$ ()
- A. $a^{\frac{6}{5}}$ B. $a^{\frac{5}{6}}$
- C. $a^{-\frac{5}{6}}$ D. $a^{\frac{5}{4}}$
3. 若 $\sqrt{\sqrt{x^3}} = \frac{3}{x}$, 则 $x =$ ()
- A. $9^{\frac{2}{7}}$ B. $3^{\frac{2}{7}}$
- C. $9^{\frac{2}{3}}$ D. $3^{\frac{2}{3}}$
4. 已知 $ab = -5$, 则 $a\sqrt{-\frac{b}{a}} + b\sqrt{-\frac{a}{b}}$ 的值是 ()
- A. $2\sqrt{5}$ B. 0
- C. $-2\sqrt{5}$ D. $\pm 2\sqrt{5}$
5. 下列运算不正确的是 ()
- A. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = \pi - 3$
- B. $\pi^{2x} = (\pi^x)^2$
- C. $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a - b$
- D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
6. (多选题) 对任意 $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$, 下列结论中恒成立的是 ()
- A. $\sqrt[n]{a^n} = a$
- B. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- C. $\sqrt[n]{|a|^n} = |a|$
- D. $(\pi - 3.14)^0 = 0^0$
7. $(\frac{1}{3})^{-1} + (\frac{1}{2})^0 - 4^{\frac{3}{2}} + 0.064^{-\frac{1}{3}} =$ _____.

8. 计算或化简:

- (1) $\sqrt{\frac{25}{9}} - (\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}} - (\pi+1)^0 + (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$;
- (2) $0.064^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{8})^0 + 16^{\frac{3}{4}} + 0.25^{\frac{1}{2}}$;
- (3) $\frac{(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a \cdot b^5}} (a > 0, b > 0)$.

素养 提能篇

9. 化简 $\sqrt[3]{(-\frac{8a^{-3}}{27b^3})^4} (a > 0, b > 0)$ 的结果是 ()
- A. $\frac{2a}{3b}$ B. $-\frac{2a}{3b}$
- C. $\frac{16}{81a^4b^4}$ D. $-\frac{16}{81b^4a^4}$
10. 已知 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$, 则 $\frac{x^2+1}{x}$ 的值为 ()
- A. 5 B. 23
- C. 25 D. 27
11. 当 $\sqrt{2-x}$ 有意义时, $\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-6x+9}$ 的化简结果是 ()
- A. $2x-5$ B. $-2x-1$
- C. -1 D. $5-2x$

思维训练篇

12. (多选题) 已知 $xy \neq 0$, 且 $\sqrt{4x^2y^2} = -2xy$, 则以下结论错误的是 ()

- A. $xy < 0$ B. $xy > 0$
C. $x > 0, y > 0$ D. $x < 0, y < 0$

13. 计算: $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - (-0.96)^0 - (3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}} + 1.5^{-2} + [(-\sqrt[3]{2})^{-4}]^{-\frac{3}{4}} =$ _____.

14. 设 $a > 0$, 则 $a^0 + \sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}} =$ _____.

15. 化简 $\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2}x^{-1}y^{\frac{1}{2}})(-\frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}})} \times \sqrt[3]{\frac{x^2}{\sqrt{y}}}$ ($x > 0, y > 0$) 的结果为 _____.

16. (1) 计算: $8^{0.25} \times \sqrt[4]{2} + (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 - \sqrt{(\frac{5}{8})^{\frac{2}{3}}} + 1.6^{-\frac{1}{3}} \times (-\frac{14}{13})^0$.

(2) 已知 $10^m = 2, 10^n = 3$, 求 $10^{\frac{3m-2n}{2}}$ 的值.

17. 设 $7^{2n-1} + 1 = 8m (m, n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $7^{2n+1} + 1 = 8m +$ _____ . (填关于 n 的表达式)

18. 已知 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 求下列各式的值.

(1) $a + a^{-1}$;

(2) $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 3}{a^2 + a^{-2} - 2}$.

4.1.2 指数函数的性质与图象

第1课时 指数函数的性质与图象

基础夯实篇

- 若函数 $y=(2a-1)^x$ (x 是自变量) 是指数函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $a>0$ 且 $a\neq 1$ B. $a\geq 0$ 且 $a\neq 1$
C. $a>\frac{1}{2}$ 且 $a\neq 1$ D. $a\geq \frac{1}{2}$
- 函数 $f(x)=(\sqrt{2})^x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值是 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$
C. 2 D. $2\sqrt{2}$
- 已知 $a=0.8^{0.7}$, $b=0.8^{0.9}$, $c=1.2^{0.8}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
A. $a>b>c$ B. $c>a>b$
C. $b>a>c$ D. $c>b>a$
- 函数 $f(x)=a^{x-1}-2$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象过定点 ()
A. $(0, -2)$ B. $(0, -1)$
C. $(1, -2)$ D. $(1, -1)$
- (多选题) 下列说法中正确的是 ()
A. 函数 $y=2^{x-1}$ 是指数函数
B. 函数 $y=ax^2+1$ ($a>1$) 的值域是 $[1, +\infty)$
C. 若 $a^m>a^n$ ($a>0, a\neq 1$), 则 $m>n$
D. 函数 $f(x)=a^{x-2}-3$ ($a>0, a\neq 1$) 的图象必过定点 $(2, -2)$
- 函数 $y=\sqrt{16-4^x}$ 的值域是_____.
- 一种专门侵占内存的计算机病毒开机时占据内存 2 KB, 然后每 3 分钟自身复制一次, 复制后所占内存是原来的 2 倍, 那么开机后经过_____分钟该病毒占据 64 MB 内存. (1 MB=1024 KB)

- 已知函数 $f(x)=a^{x-1}$ ($x\geq 0$) 的图象经过点 $(2, \frac{1}{2})$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
(1) 求 a 的值;
(2) 求函数 $y=f(x)+1$ ($x\geq 0$) 的值域.

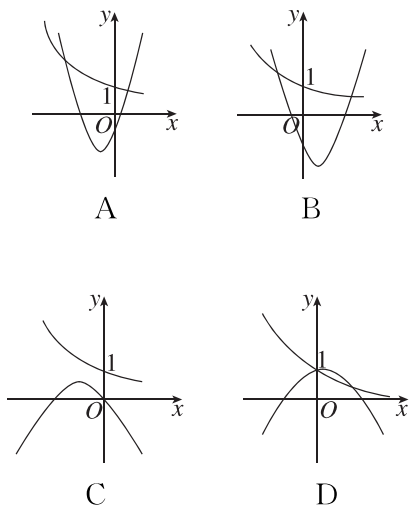
素养提能篇

- 已知 a, b 是实数, 则“ $a>|b|$ ”是“ $2^a>2^b$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- 若正实数 a, b, c 满足 $c<c^b<c^a<1$, 则 a, b 的大小关系为 ()
A. $0<a<b<1$ B. $0<b<a<1$
C. $1<b<a$ D. $1<a<b$

11. 若函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 则实数 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{16}$

12. 如图所示, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 与指数函数 $y = (\frac{a}{b})^x$ 的图象可能为 ()



13. (多选题) 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数
 B. $f(-3) > f(2)$
 C. $f(2x) = 2f(x)g(x)$
 D. $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq 0, \\ 6a - x, & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的值域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围为_____.

15. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1} + a$ 是奇函数, 则 $f(1) =$ _____.

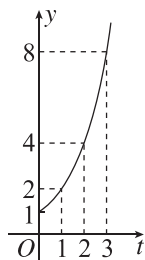
16. 画出函数 $y = 2^{|x-1|}$ 的图象, 并根据图象写出此函数的单调区间和值域.

思维训练篇

17. 若 $3^x + 7^y \leq 3^{-y} + 7^{-x}$, 则 ()
 A. $x - y \leq 0$ B. $x - y \geq 0$
 C. $x + y \leq 0$ D. $x + y \geq 0$

18. (多选题) 某池塘中的浮萍面积 y (m^2) 与时间 t (月) 的关系为 $y = a^t$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 该函数的图象如图所示, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 这个指数函数的底数是 2
 B. 第 5 个月时, 浮萍的面积会超过 35 m^2
 C. 浮萍面积从 4 m^2 增加到 16 m^2 需要经过 2 个月
 D. 浮萍每个月增加的面积都相等



第2课时 指数函数的性质与图象的应用

基础 夯实篇

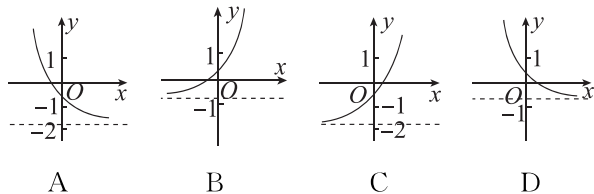
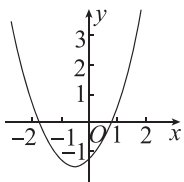
1. 某工厂去年的总产值为 a , 计划今后 5 年内每年比上一年增长 10%, 则这 5 年的最后一年该工厂的总产值是 ()

A. $1.1^4 a$ B. $1.1^5 a$
C. $1.1^6 a$ D. $(1+1.1^5)a$

2. 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ()

A. $y=5^{\frac{1}{2-x}}$ B. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$
C. $y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}$ D. $y=\sqrt{1-2^x}$

3. 已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)$ (其中 $a>b$), 若 $f(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象大致为 ()



4. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2-x+2}}$ 的单调递增区间为 ()

A. $(-\infty, -2]$ B. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$
C. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5. 已知函数 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$), 若 $f(2)=\frac{1}{3}$, 则 $f(-2)=$ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

6. 已知函数 $y=a \cdot b^x+c$ ($b>0, b\neq 1$), $x\in[0, +\infty)$ 的值域为 $[-1, 2)$, 则该函数的一个解析式为 $y=$ _____.

7. 某驾驶员喝酒后血液中的酒精含量 $f(x)$ (mg/mL) 随时间 x (h) 变化的规律近似满足关系式 $f(x)=$
- $$\begin{cases} 5^{x-2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x > 1. \end{cases}$$
- 规定驾驶员开车时血液中的

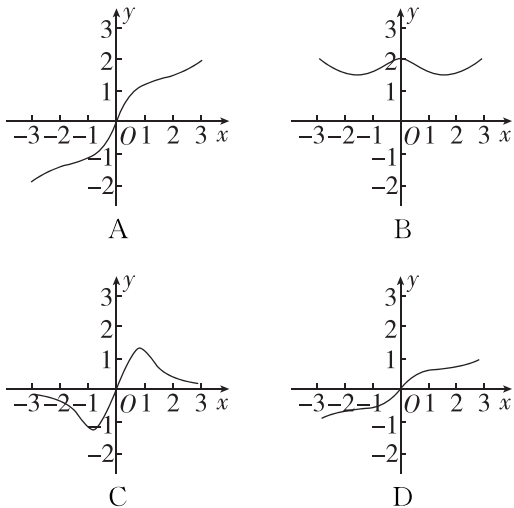
酒精含量不得超过 0.02 mg/mL, 据此可知, 此驾驶员至少 _____ h 后才能开车. (精确到 1 h)

8. 已知函数 $f(x)=2^{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

- (1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性;
(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并求不等式 $f(x+2)>f(2x-1)$ 的解集.

素养 提能篇

9. 已知函数 $y = \left(\frac{1}{2a-4}\right)^x$ 的图象与指数函数 $y = a^x$ 的图象关于 y 轴对称, 则实数 a 的值是 ()
- A. 1 B. 2
C. 4 D. 8
10. 若函数 $f(x) = a^{2x^2-3x+1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $(1, 3)$ 上单调递增, 则关于 x 的不等式 $a^{x-1} > 1$ 的解集为 ()
- A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x < 1\}$
C. $\{x | x > 0\}$ D. $\{x | x < 0\}$
11. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 1}$ 在 $[-3, 3]$ 上的大致图象为 ()



12. (多选题) 已知函数 $f(x) = m - \frac{3^x}{1+3^x}$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是 ()
- A. $m = \frac{1}{2}$
B. 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的最大值为 $\frac{1}{2}$
C. 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减
D. 存在实数 n , 使得关于 x 的方程 $f(x) - n = 0$ 有两个不相等的实数根
13. 若不等式 $2^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ 的解集为函数 $y = 2^x$ 的定义域, 则函数 $y = 2^x$ 的值域为 _____.

14. 已知指数函数 $f(x) = (2a-1)^x$, 且 $f(-3) > f(-2)$, 则实数 a 的取值范围为 _____.
15. 函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$ ($x \in [-1, 1]$) 的最大值为 _____, 最小值为 _____.
16. 已知指数函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1, 3)$, $g(x) = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为 $h(a)$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 求函数 $g(x)$ 的最小值 $h(a)$ 的表达式.

思维 训练篇

17. 已知函数 $f(x) = x^3 - \frac{2}{2^x + 1}$, 则不等式 $f(x) + f(2x-1) > -2$ 的解集为 ()
- A. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $(1, +\infty)$
C. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ D. $(-\infty, 1)$
18. 若函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调函数, 且满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f[f(x) - 2^x] = 11$, 则 $f(4)$ 的值为 _____.

4.2 对数与对数函数

4.2.1 对数运算

基础夯实篇

1. 指数式 $b^c = a (b > 0, b \neq 1)$ 所对应的对数式是 ()
- A. $\log_c a = b$ B. $\log_c b = a$
C. $\log_a b = c$ D. $\log_b a = c$
2. 若 $n = \log_{(m-3)}(6-m)$, 则实数 m 的取值范围是 ()
- A. $m > 6$ 或 $m < 3$
B. $3 < m < 6$
C. $3 < m < 4$ 或 $4 < m < 6$
D. $4 < m < 5$
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-2), & x > 2, \\ 2^x, & x \leq 2, \end{cases}$ 则 $f[f(3)] =$ ()
- A. 1 B. 2
C. 0 D. $\frac{1}{2}$
4. 已知 $f(2^x) = x$, 则 $f(3) =$ ()
- A. 8 B. 9
C. $\log_2 3$ D. $\log_3 2$
5. (多选题) 下列说法正确的有 ()
- A. $\lg(\lg 10) = 0$
B. $\lg(\ln e) = 0$
C. 若 $e = \ln x$, 则 $x = e^2$
D. $\ln(\lg 1) = 0$
6. 已知 $\log_{\sqrt{x}}(2x) = 4$, 则 $x =$ ()
- A. -2 B. 0
C. 2 D. 4
7. 已知 $x = \log_2 3$, 则 $\frac{2^{2x} - 2^{-2x} + 2}{2^x + 2^{-x}}$ 的值为 _____.
8. 计算与化简:
- (1) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 2}$; (2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 7}$; (3) $a^{\log_a b \cdot \log_b c}$;
(4) $3^{1+\log_3 6} - 2^{4+\log_2 3} + 10^{3\lg 3} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 4}$.

素养提能篇

9. 已知 $\ln[\log_4(\log_2 x)] = 0$, 那么 $x^{-\frac{1}{2}} =$ ()
- A. 4 B. -4
C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$
10. 已知实数 a, b 满足 $a^b = b^a$, 且 $\log_a b = 2$, 则 $ab =$ ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2
C. 4 D. 8
11. 方程 $\log_x(x+2024) = 2$ 的实数解的个数是 ()
- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
12. (多选题) 下列函数和 $y = x$ 是同一函数的是 ()
- A. $y = 10^{\lg x}$ B. $y = \lg 10^x$
C. $y = \sqrt[3]{x^3}$ D. $y = \frac{x^2}{x}$

思维训练篇

13. 已知 $4^a = 2$, $\lg x = a$, 则 $x =$ _____.

14. 计算: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - \lg \frac{1}{100} =$ _____.

15. 若 $\log_2(\log_3 x) = \log_3(\log_4 y) = \log_4(\log_2 z) = 0$, 则 $x + y + z$ 的值为 _____.

16. 设 x, y 均为正实数, 且 $2x + 5y = 20$, 求 $3^{2\log_3 xy}$ 的最大值.

17. 某高山地区的大气压强 p (Pa) 与海拔高度 h (m) 近似满足函数关系 $p = p_0 e^{-kh}$, 其中 $k = 0.000126$, p_0 是海平面大气压强. 已知在甲、乙两处测得的大气压强分别为 p_1, p_2 , 且 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$, 那么甲、

乙两处的海拔高度之差约为 (参考数据: $\ln \frac{1}{2} \approx -0.693$) ()

A. 4900 m B. 5500 m

C. 6200 m D. 7400 m

18. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $\log_4 a = \log_6 b = \log_8 (a + b)$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

4.2.2 对数运算法则

基础 夯实篇

1. 化简 $\frac{1}{2}\log_6 12 - 2\log_6 \sqrt{2}$ 的结果为 ()

- A. $6\sqrt{2}$ B. $12\sqrt{2}$
C. $\log_6 \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 已知 $a > 0, a \neq 1, x > y > 0, n \in \mathbf{N}^*$, 给出下列各式:

① $(\log_a x)^n = n \log_a x$; ② $\log_a x = -\log_a \frac{1}{x}$;

③ $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a \frac{x}{y}$; ④ $\sqrt[n]{\log_a x} = \frac{1}{n} \log_a x$;

⑤ $\frac{1}{n} \log_a x = \log_a \sqrt[n]{x}$; ⑥ $\log_a x = \log_{a^n} x^n$;

⑦ $\log_a \frac{x-y}{x+y} = -\log_a \frac{x+y}{x-y}$.

其中式子成立的有 ()

- A. 3 个 B. 4 个
C. 5 个 D. 6 个

3. (多选题) 下列运算错误的是 ()

A. $2\log_{\frac{1}{3}} 10 + \log_{\frac{1}{3}} 0.25 = 2$

B. $\log_4 27 \cdot \log_{25} 8 \cdot \log_9 5 = \frac{8}{9}$

C. $\lg 2 + \lg 50 = 10$

D. $\log_{(2+\sqrt{3})} (2-\sqrt{3}) - (\log_2 \sqrt{2})^2 = -\frac{5}{4}$

4. $\log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10 =$ _____.

5. 已知 x, y, z 都是大于 1 的实数, $m > 0$ 且 $\log_x m = 24, \log_y m = 40, \log_{xyz} m = 12$, 则 $\log_z m$ 的值为 _____.

6. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1, \log_a 2 = x, \log_a 5 = y$, 则 $a^{x+2y} =$ _____.

7. 设 $a = \log_2 m, b = \log_3 m$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $m =$ _____.

8. 计算: (1) $(\lg 5)^2 + 2\lg 2 - (\lg 2)^2$;

(2) $\frac{\lg 3 + \frac{2}{5}\lg 9 + \frac{3}{5}\lg \sqrt{27} - \lg \sqrt{3}}{\lg 81 - \lg 27}$.

素养 提能篇

9. 若 $2\log_2 (2x - y) = \log_2 x + \log_2 y$, 则 $\log_2 x - \log_2 y =$ ()

- A. 2 B. 2 或 0
C. 0 D. -2 或 0

10. 如果关于 $\lg x$ 的方程 $(\lg x)^2 + (\lg 2 + \lg 3)\lg x + \lg 2\lg 3 = 0$ 的两根分别为 $\lg x_1, \lg x_2$, 那么 $x_1 x_2$ 的值为 ()

- A. $\lg 2 \cdot \lg 3$ B. $\lg 2 + \lg 3$
C. $\frac{1}{6}$ D. -6

11. 下列函数中, 满足“ $\forall x > 0, f(x^2) = 2f(x)$ ”的是 ()

- A. $f(x) = 2^x$ B. $f(x) = \lg x$
C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = x$

12. 下棋可以锻炼脑部, 促进脑细胞新陈代谢, 锻炼脑力发育, 开发智力. 围棋拥有 19×19 的超大棋盘, 是状态空间复杂度最高的棋类运动, 其状态空间复杂度上限 M 约为 3^{361} , 而中国象棋的状态空间复杂度上限 N 约为 10^{48} , 则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是 ($\lg 3 \approx 0.48$) ()

- A. 10^{105} B. 10^{125}
C. 10^{145} D. 10^{165}

13. (多选题) 已知 $a > 0, b > 0, \ln a = \frac{\ln b}{2} = \frac{\ln(3a+2b)}{3}$, 则下列说法错误的是 ()

- A. $b=2a$
 B. $3a+2b=b^3$
 C. $\frac{\ln b}{\ln(a+1)} = \log_2 3$
 D. $e^{\frac{\ln b}{a}} = 3$

14. 已知 $f(8^x) = x$, 那么 $\log_3 2 \cdot f(27) =$ _____.

15. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若 $\log_a 4 = 4m, \log_a 3 = n$, 则 a^{3m-n} 的值为 _____.

16. (1) 若 $a + a^{-1} = 3$, 求 $a^2 + a^{-2} - 3^{1+\log_3 2}$ 的值.
 (2) 已知 $\log_3 2 = a, \log_3 7 = b$, 试用 a, b 表示 $\log_{28} \frac{49}{8}$.

17. (多选题) 已知 $2^a = 3, b = \log_3 2$, 则 ()

- A. $a+b > 2$
 B. $ab = 1$
 C. $3^b + 3^{-b} = \frac{82}{9}$
 D. $\frac{a(b+1)+1}{2a} = \log_9 12$

18. 如果刚泡好的茶水温度是 θ_1 °C, 环境温度是 θ_0 °C, 那么 t 分钟后茶水的温度 θ (单位: °C) 可由公式 $\theta(t) = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$ 求得. 现有刚泡好的茶水温度是 100 °C, 放在室温 25 °C 的环境中自然冷却, 5 分钟以后茶水的温度是 50 °C.

(1) 求 k 的值;

(2) 经验表明, 当室温为 15 °C 时, 某种茶刚泡好的茶水温度为 95 °C, 自然冷却至 60 °C 时饮用可以产生最佳口感, 那么刚泡好的茶水大约需要放置多长时间才能达到最佳饮用口感? (结果精确到 0.1; 参考数据: $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1$)

4.2.3 对数函数的性质与图象

第1课时 对数函数的性质与图象

基础夯实篇

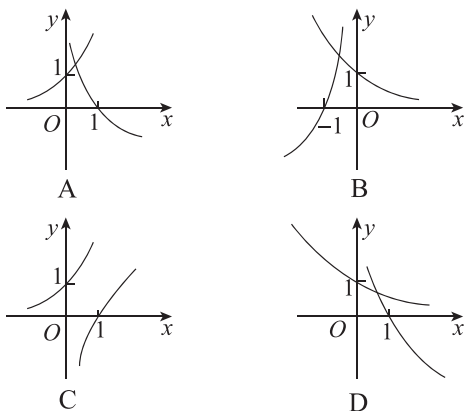
1. 给出下列函数: ① $y = \log_{\frac{2}{3}} x^2$; ② $y = \log_3(x-1)$; ③ $y = \log_{(x+1)} x$; ④ $y = \log_x x$. 其中是对数函数的有 ()

- A. 1个 B. 2个
C. 3个 D. 4个

2. 对数函数的图象过点 $M(16, 4)$, 则此对数函数的解析式为 ()

- A. $y = \log_4 x$ B. $y = \log_{\frac{1}{4}} x$
C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \log_2 x$

3. 函数 $y = a^x$ 与 $y = -\log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在同一坐标系中的图象可能是 ()



4. (多选题) 已知 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq 1, b \neq 1$, 若 $\log_a b > 1$, 则下列不等式可能正确的是 ()

- A. $(b-1)(b-a) > 0$
B. $(a-1)(a-b) > 0$
C. $(a-1)(b-1) < 0$
D. $(a-1)(b-a) > 0$

5. (多选题) 若 $0 < a < 1$, 则 ()

- A. $\log_a(1-a) < \log_a(1+a)$
B. $\log_a(1+a) < 0$
C. $(1-a)^{\frac{1}{3}} < (1-a)^{\frac{1}{2}}$
D. $a^{1-a} < 1$

6. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \lg x}$ 的定义域为 _____. (用区间表示)

7. 函数 $y = \lg(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间为 _____.

8. 已知 $\log_a(2a+1) < \log_a(3a-1)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 求实数 a 的取值范围.

素养提能篇

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ 2^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 则满足 $f(a) < \frac{1}{2}$ 的 a 的取值范围是 ()

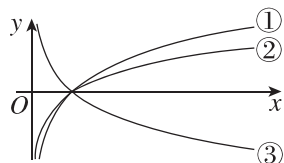
- A. $(-\infty, -1)$
B. $(0, \sqrt{2})$
C. $(-\infty, -1) \cup (0, \sqrt{2})$
D. $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$

10. 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

11. 已知三个对数函数 $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ ($a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$), 它们分别对应图中序号为①②③的三个图象, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$
B. $b < a < c$
C. $c < a < b$
D. $c < b < a$



思维训练篇

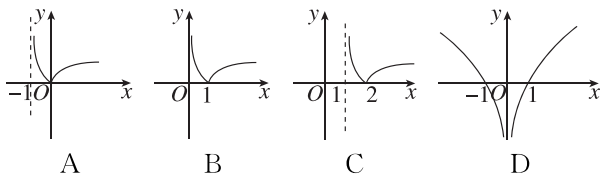
12. 已知等式 $\log_2 m = \log_3 n, m, n \in (0, +\infty)$ 成立, 给出下列关系式: ① $m = n$; ② $n < m < 1$; ③ $m < n < 1$; ④ $1 < n < m$; ⑤ $1 < m < n$. 其中可能成立的是 ()
- A. ①③⑤ B. ①②⑤
C. ①②④ D. ①④⑤
13. (多选题) 若实数 a, b 满足 $\log_a 2 < \log_b 2$, 则下列关系式可能成立的有 ()
- A. $0 < b < a < 1$ B. $0 < a < 1 < b$
C. $a > b > 1$ D. $0 < b < 1 < a$
14. 已知函数 $f(x) = \ln\left(\frac{e^{ax} + 1}{e^x + 1}\right)$ 是奇函数, 则实数 a 的值为_____.
15. 已知函数 $f(x) = \log_a x + b (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的定义域和值域都为 $[1, 2]$, 则 $a + b =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+ax)$ 为奇函数.
- (1) 求实数 a 的值;
(2) 用定义法讨论并证明函数 $f(x)$ 的单调性.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & -2 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & \frac{1}{4} < x \leq c, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 2]$, 则 c 的值为 ()
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$
C. 4 D. 8
18. 已知函数 $f(x) = \log_a(1-x) - \log_a(b+x) + m (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 为奇函数.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域及解析式;
(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上的最大值比最小值大 2, 求 a 的值.

第2课时 对数函数的性质与图象的应用

基础 夯实篇

1. 函数 $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ 的值域为 ()
 A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
 C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
2. 函数 $y = \lg|x|$ 是 ()
 A. 偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
 B. 偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减
 C. 奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 D. 奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减
3. 设 $a = \log_2 5, b = \log_3 5, c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $a > c > b$ B. $a > b > c$
 C. $b > a > c$ D. $c > a > b$
4. 函数 $y = |\lg(x+1)|$ 的大致图象是 ()



5. (多选题) 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2-x) - \log_2(x+4)$, 则下列说法中错误的有 ()
 A. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 2]$
 B. 函数 $y = f(x-1)$ 是偶函数
 C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上是减函数
 D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
6. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, f(a) = 4$, 则 $f(-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 1$ 的图象过定点 A, 若一次函数 $y = mx + n (m > 0, n > 0)$ 的图象经过点 A, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 已知函数 $f(x) = \log_a x + m (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象过点 $(8, 2)$, 点 $P(3, -1)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点 Q 在 $f(x)$ 的图象上.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 (2) 若 $g(x) = 2f(x) - f(x-1)$, 求 $g(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的值.

素养 提能篇

9. 已知 $x = \log_3 5, y = \log_5 2, z = 3^{-\frac{1}{2}}$, 则下列关系正确的是 ()
 A. $x > y > z$ B. $y > x > z$
 C. $z > y > x$ D. $x > z > y$
10. 已知函数 $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 满足 $f(a+1) > f(a+2)$, 则 $f(2x^2 - x) > 0$ 的解集是 ()
 A. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)$
 B. $(-\frac{1}{2}, 1)$
 C. $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)$
 D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$
11. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是减函数. 若 $f(\lg x) > f(1)$, 则 x 的取值范围是 ()
 A. $(\frac{1}{10}, 1)$
 B. $(0, \frac{1}{10}) \cup (1, +\infty)$
 C. $(\frac{1}{10}, 10)$
 D. $(0, 1) \cup (10, +\infty)$

思维训练篇

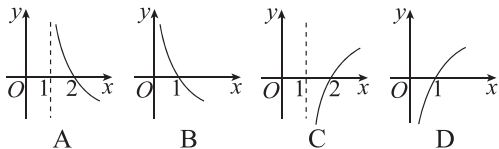
12. (多选题) 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 + ax - a - 1)$, 则下列说法中正确的是 ()
- A. 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- B. $f(x)$ 一定有最小值
- C. 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R}
- D. 若 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \geq -4\}$
13. (多选题) 已知实数 a, b, c 满足 $\lg a = 10^b = \frac{1}{c}$, 则下列关系式中可能成立的是 ()
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
- C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
14. 若 $f(x) = g(x+1) \cdot \ln(x^2 - 1)$ 为奇函数, 则 $g(x)$ 的解析式可以为 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 若 $f(\log_a 4) \leq f(2)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x}{8} \cdot \log_2(8x)$, 函数 $g(x) = 4^x - 2^{x+1} - 4$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的值域;
- (2) 若不等式 $f(x) \leq g(a)$ 对任意实数 $a \in [0, 2]$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

17. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数, 且对任意 $x \in (0, +\infty)$ 都满足 $f[f(x) - 3\log_2 x] = 5$, 则满足不等式 $f(x) - 2 < \log_2(3x)$ 的 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
18. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个“不动点”, 也称 $f(x)$ 在定义域 D 上存在“不动点”. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x - a \cdot 2^{x+1} + 2)$.
- (1) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的“不动点”;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上存在“不动点”, 求实数 a 的取值范围.

4.3 指数函数与对数函数的关系

基础 夯实篇

- 函数 $y = -\frac{1}{x+1} (x \neq -1)$ 的反函数是 ()
 A. $y = -\frac{1}{x} - 1 (x \neq 0)$
 B. $y = -\frac{1}{x} + 1 (x \neq 0)$
 C. $y = -x + 1 (x \in \mathbf{R})$
 D. $y = -x - 1 (x \in \mathbf{R})$
- 设函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = 2^{x+a}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 且 $f(2) + f(4) = 1$, 则 $a =$ ()
 A. -1 B. 1
 C. 2 D. 4
- 已知函数 $f(x) = 1 + 2\lg x$, 则 $f(1) + f^{-1}(1) =$ ()
 A. 0 B. 1
 C. 2 D. 3
- 函数 $f(x) = \log_2(3^x + 1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 ()
 A. $(1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
 C. $(0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
- (多选题) 函数 $y = 1 + a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的反函数的图象可能是 ()

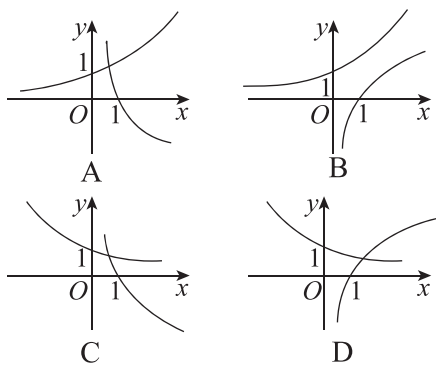


- 已知函数 $y = a^x + b$ 的图象过点 $(1, 4)$, 其反函数的图象过点 $(2, 0)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
- 函数 $f(x) = x^2 + 2x (x \geq 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 求下列函数的反函数:
 - $y = 3x - 1 (x \in \mathbf{R})$;
 - $y = x^3 + 1 (x \in \mathbf{R})$;
 - $y = \sqrt{x} + 1 (x \geq 0)$;

$$\textcircled{4} f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq -1), \\ -x + 1 & (x > -1). \end{cases}$$

素养 提能篇

- 已知函数 $f(x) = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象过点 $(4, 2)$, 若 $f(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 的值域为 ()
 A. $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{3}, 1]$
 C. $[1, 3]$ D. $[2, 8]$
- 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 若 $f(1) \cdot g(2) < 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在同一平面直角坐标系内的图象可能是 ()



- 若关于 x 的方程 $\log_{\frac{1}{2}}(a - 2^x) = 2 + x$ 有解, 则 a 的最小值为 ()
 A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

- 函数 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的反函数是 _____.

思维训练篇

13. 已知函数 $f(x)$ 为函数 $y = \log_2 x$ 的反函数, 则 $[f(2-\sqrt{2})]^{2+\sqrt{2}} =$ _____.
14. 已知函数 $f(x)$ 与函数 $y = 2^x$ 互为反函数, 则 $f[f(2)] =$ _____.
15. 若函数 $y = f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x) = \log_a(x-1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的反函数, 则函数 $y = f^{-1}(x-1) + 3$ 的图象一定经过定点 _____.
16. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$, 若函数 $g(x)$ 的图象与函数 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.
- (1) 求 $g(3)$ 的值;
- (2) 求证: 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

17. 设 α, β 分别是方程 $\log_2 x + x - 4 = 0$ 和 $2^x + x - 4 = 0$ 的根, 则 $\alpha + \beta =$ _____.
18. 已知函数 $f(x)$ 的图象和函数 $y = -\log_{\sqrt{3}} x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $g(x) = (m+1) \cdot f(x) + 3^{1-x} - 2m$ ($x \leq 0$) 的最小值为 -1 , 求 m 的值.

